E N . S . I option : DEUG A -1992-

Dans les parties I et II et dans la première question de la partie IV, le corps de base est celui des complexes, noté $\mathbb{C}$, alors que dans le reste du problème, ce sera celui des réels.
Dans les parties I et II, la lettre j désigne le complexe de carré égal à -1, la lettre e désigne la base des logarithmes népériens, le symbole Log(x) représente le logarithme népérien.
La troisième partie est indépendante des deux premières.

PREMIERE PARTIE

1) On appelle suite double de nombres complexes, une application u de N* x N* sur $\mathbb{C}$ qui à tout couple (m,n) d'entiers positifs associe le nombre complexe u(m,n).
On s'intéresse aux suites doubles possédant les propriétés suivantes :

(P1) Il existe une suite (simple) de réels positifs ou nuls α_n et deux entiers positifs fixes, m_0 et n_0 tels que :

$$m \geq m_0 \, , \, n \geq n_0 \qquad \text{entraîne} \qquad |u(m,n)| \leq \alpha_n$$

(P2) La série de terme général α_n est convergente.

(P3) Pour chaque n fixé, la suite u(m,n) admet une limite U_n dans $\mathbb{C}$ quand $m \to +\infty$

Montrer que si u(m,n) est une suite double vérifiant P1, P2, P3 :

a) Il existe un entier M, tel que pour tout $m \geq M$ fixé, la série de terme général u(m,n) est convergente. Autrement dit :

$$\exists\, U(m) \in \mathbb{C} \,/\, m \geq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u(m,n) = U(m)$$

b) La série de terme général U_n définie par la propriété (P3) est aussi convergente. Soit U sa somme :

$$\sum_{1}^{+\infty} U_n = U$$

c) Lorsque m tend vers $+\infty$, U(m) admet une limite égale à U.

2) Pour $m \in N^*$, on pose :

$$S_m = \left(\frac{m-1}{m}\right)^m + \left(\frac{m-2}{m}\right)^m + \ldots + \left(\frac{m-n}{m}\right)^m + \ldots + \left(\frac{1}{m}\right)^m$$

On demande la limite de S_m quand $m \to +\infty$.

Pour cela, on aura intérêt à utiliser la question précédente en posant :

$$\begin{cases} u(m,n) = (1 - \frac{n}{m})^m & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ u(m,n) = 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

Il pourra également être utile de considérer la fonction définie pour tout réel $t \in [\, n, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = (1 - \frac{n}{t})^t$$

et d'étudier ses variations avec tout le soin désirable.

3) Soit z un nombre complexe quelconque et m un entier positif.

Montrer que :

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{z}{m})^m = e^z$$

On conseille de développer $(1 + \frac{z}{m})^m$ par la formule du binôme, puis comme dans la deuxième question, d'introduire une suite double (dépendant en plus de z). On peut toutefois étudier également le module et l'argument de $(1 + \frac{z}{m})^m$ en posant au préalable $z = x + jy$, où x et y sont des réels.

Les solutions tendant à utiliser les propriétés de Log(1 + t) avec t complexe, ne seront pas prises en considération par le correcteur.

DEUXIEME PARTIE

On pose, m étant un entier positif et z une variable complexe :

$$Q_m(z) = \frac{1}{2j}\left[(1 + \frac{jz}{2m+1})^{2m+1} - (1 - \frac{jz}{2m+1})^{2m+1}\right]$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q_m(z) = 0$

2) Trouver le terme de plus haut degré de Qm et factoriser ce polynôme.

3) Ecrire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{Q'_m(z)}{Q_m(z)}$ où Q'_m est le polynôme dérivé de Q_m.

4) En utilisant les résultats de la première partie, prouver que si aucun des complexes ($z^2 - n^2\pi^2$) n'est nul, n étant un entier strictement positif, on a :

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{z^2 - (2m+1)^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right)} = \sum_{l=n}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$$

5) Montrer que $\operatorname{Cotg}(z) = 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2} + \frac{1}{z}$

TROISIEME PARTIE

1) Soit n un entier positif, on considère les (2n + 1) fonctions à valeurs réelles, de la variable t, définies par :

$$f_0(t) = 1$$
$$f_r(t) = \cos(rt) \qquad r = 1, \ldots, n$$
$$f_{n+s}(t) = \sin(st) \qquad s = 1, \ldots, n$$

Montrer que si p et q sont deux entiers distincts de l'intervalle [0,2n], on a :

$$\int_0^{2\pi} f_p(t)\, f_q(t)\, dt = 0$$

2) En déduire que les (f_p) sont linéairement indépendants sur R.

3) A l'ensemble des 2n réels $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, on associe la fonction φ de la variable réelle t définie par :

$$\varphi(t) = -\left(\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}\right) + \left(\frac{a_1}{1}\cos t + \frac{a_2}{2}\cos 2t + \ldots + \frac{a_n}{n}\cos nt\right) + \left(\frac{b_1}{1}\sin t + \frac{b_2}{2}\sin 2t + \ldots + \frac{b_n}{n}\sin nt\right)$$

Calculer en fonction de $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ l'intégrale :

$$J(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\varphi(t)]^2\, dt$$

E.N.S.I option : DEUG A.

4) J est une forme quadratique des 2n variables $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$. Prouver que cette forme est définie positive. C'est-à-dire :

$$J(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) \geq 0 \text{ , et :}$$

$$J(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = b_1 = ... b_n = 0$$

5) Ecrire la matrice symétrique associée à cette forme J. On notera cette matrice T pour la suite du problème

---

QUATRIEME PARTIE

1) Soit n un entier strictement positif et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n nombres complexes quelconques. On définit le déterminant $D_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ comme étant le déterminant de la matrice carrée B d'ordre n sur $\mathbb{C}$, définie comme suit :

Soit B_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne. On pose :

$$B_{ij} = 1 \qquad \text{si } i \neq j$$
$$B_{ij} = 1 + x_i \qquad \text{si } i = j$$

Donner une relation de récurrence liant $D_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ à $D_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$

Déduire alors, en supposant qu'aucun des x_i n'est nul, une expression simple de $D_n(x_1, ..., x_n)$ faisant intervenir la somme :

$$\sum_{1=i}^{n} \frac{1}{x_i}$$

et le produit :

$$\prod_{1=i}^{n} x_i$$

Que dire si l'un des x_i est nul ? Que dire si deux des x_i d'indices distincts sont nuls ?

2) On s'intéresse alors aux valeurs propres de T définie lors de la troisième partie.

a) Que dire de leur réalité et de leur signe ?
b) Ecrire l'équation caractéristique de la matrice T. En utilisant en particulier les résultats de IV 1), montrer que ces valeurs propres se répartissent en deux classes, l'une constituée par des nombres rationnels dont on donnera l'expression, et l'autre par les racines de l'équation :

$$g_n(\lambda) = \frac{1}{2}$$

où g_n est la fonction de la variable λ définie par :

$$g_n(\lambda) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\lambda p^2 - 1}$$

En étudiant les variations de $g_n(\lambda)$ quand λ parcourt $\mathbb{R}$ privé de $(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2})$, retrouver les résultats du **a)**.

Montrer de plus que toutes les valeurs propres de T sont distinctes.

3) Etudier pour $\lambda > 1$, la convergence de la série :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda p^2 - 1}$$

Calculer sa somme pour $\lambda = 4$.
Montrer que si λ_n est la plus grande des valeurs propres de T, on a :

$$1 < \lambda_n < 4$$

et que la suite de terme général (λ_n) est une suite croissante de n et que, si $n \to +\infty$, elle admet une limite que l'on précisera.

CINQUIEME PARTIE

On se propose d'étendre les résultats de la question 3) de la partie précédente à toutes les racines de l'équation $g_n(\lambda) = \frac{1}{2}$ lorsque $n \to +\infty$. Soient $(\mu_{n,0}; \mu_{n,1}; \ldots \mu_{n,n-1})$ ces racines classées par ordre de grandeur décroissante (on a donc $\mu_{n,0} = \lambda_n$).

1) Soit $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq \frac{1}{p^2}$ pour tout entier positif p. On pose :

$$\lim_{n \to \infty} g_n(\lambda) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda p^2 - 1} = g(\lambda)$$

En utilisant les résultats de la deuxième partie, exprimer $g(\lambda)$ à l'aide de fonctions élémentaires usuelles. On distinguera les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

2) De ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{R}$ privé de $\{0\} \cup \{\frac{1}{p^2}, p \in \mathbb{N}^*\}$, l'équation $g(\lambda) = \frac{1}{2}$.

(On trouvera une infinité de racines, d'expressions simples.)

3) Du calcul précédent, déduire que si $n \to +\infty$, à k fixé, $\mu_{n,k}$ est une fonction croissante de n qui tend vers une limite que l'on précisera.